Introdução a Probabilidade

Universidade Estadual de Santa Cruz

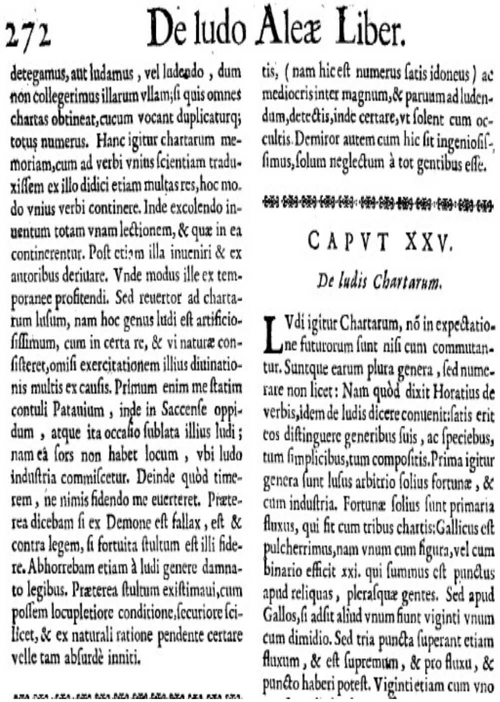
Ivan Bezerra Allaman

Cronograma

1. Origem e história
2. Introdução
3. Definições básicas
4. Conceituação de probabilidade
5. Probabilidade condicional
6. Independência estatística

Origem e história

- Um dos primeiros registros sobre probabilidade foi encontrado no livro de Girolamo Cardano em 1526.



272 De ludo Aleæ Liber.

detegamus, aut ludamus , vel ludendo , dum
non collegerimus illarum vllam;ſi quis omnes
chartas obtineat,cucum vocant duplicaturq;
totus numerus. Hanc igitur chartarum me-
moriam,cum ad verbi vnius ſcientiam tradu-
xiſſem ex illo didici etiam multas res,hoc mo.
do vnius verbi continere. Inde excolendo in-
uentum totam vnam lectionem, & quæ in ea
continerentur. Poſt etiam illa inueniri & ex
autoribus deriuare. Vnde modus ille ex tem-
poranee profitendi. Sed reuertor ad charta-
rum luſum, nam hoc genus ludi eſt artificio-
ſiſſimum, cum in certa re, & vi naturæ con-
ſiſteret,omiſi exercitationem illius diuinatio-
nis multis ex cauſis. Primum enim me ſtatim
contuli Patauium , inde in Saccenſe oppi-
dum , atque ita occaſio ſublata illius ludi ;
nam eà ſors non habet locum , vbi ludo
induſtria commiſcetur. Deinde quòd time-
rem , ne nimis fidendo me euerteret. Præte-
rea dicebam ſi ex Demone eſt fallax , eſt &
contra legem, ſi fortuita ſtultum eſt illi fide-
re. Abhorrebam etiam à ludi genere damna-
to legibus. Præterea ſtultum exiſtimaui,cum
poſſem locupletiore conditione,ſecuriore ſci-
licet, & ex naturali ratione pendente certare
velle tam abſurdè inniti.

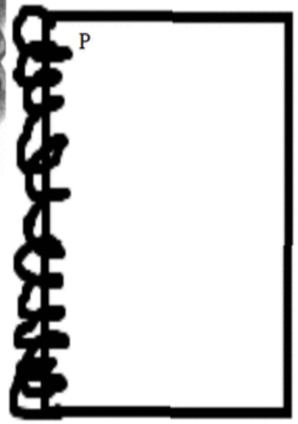
tis, (nam hic eſt numerus ſatis idoneus) ac
mediocris inter magnum,& paruum ad luden-
dum,detectis,inde certare,vt ſolent cum oc-
cultis. Demiror autem cum hic ſit ingenioſiſ-
ſimus,ſolum neglectum à tot gentibus eſſe.

CAPVT XXV.

De ludis Chartarum.

LVdi igitur Chartarum, nõ in expectatio-
ne futurorum ſunt niſi cum commutan-
tur. Suntque earum plura genera , ſed nume-
rare non licet : Nam quòd dixit Horatius de
verbis,idem de ludis dicere conuenit:ſatis erit
eos diſtinguere generibus ſuis , ac ſpeciebus,
tum ſimplicibus,tum compoſitis.Prima igitur
genera ſunt luſus arbitrio ſolius fortunæ , &
cum induſtria. Fortunæ ſolius ſunt primaria
fluxus, qui fit cum tribus chartis:Gallicus eſt
pulcherrimus,nam vnum cum figura,vel cum
binario efficit xxi. qui ſummus eſt punctus
apud reliquas , pleraſquæ gentes. Sed apud
Gallos,ſi adſit aliud vnum fiunt viginti vnum
cum dimidio. Sed tria puncta ſuperant etiam
fluxum , & eſt ſupremum , & pro fluxu , &
puncto haberi poteſt. Viginti etiam cum vno

- Para muitos o início da teoria da probabilidade foi proveniente da correspondência entre Pierre de Fermat e Blaise Pascal (1657).



- Christiaan Huygens (1657): deu o primeiro tratamento científico ao assunto.

- Bernoulli (1654-1705): "Ars conjectandi", que demonstrou a "lei dos grandes números"

- Laplace (1749-1827): "Teoria analítica das probabilidades", conhecida pelo nome de "Lei de Laplace".

Introdução

No estudo dos fenômenos de observação são utilizados dois modelos:

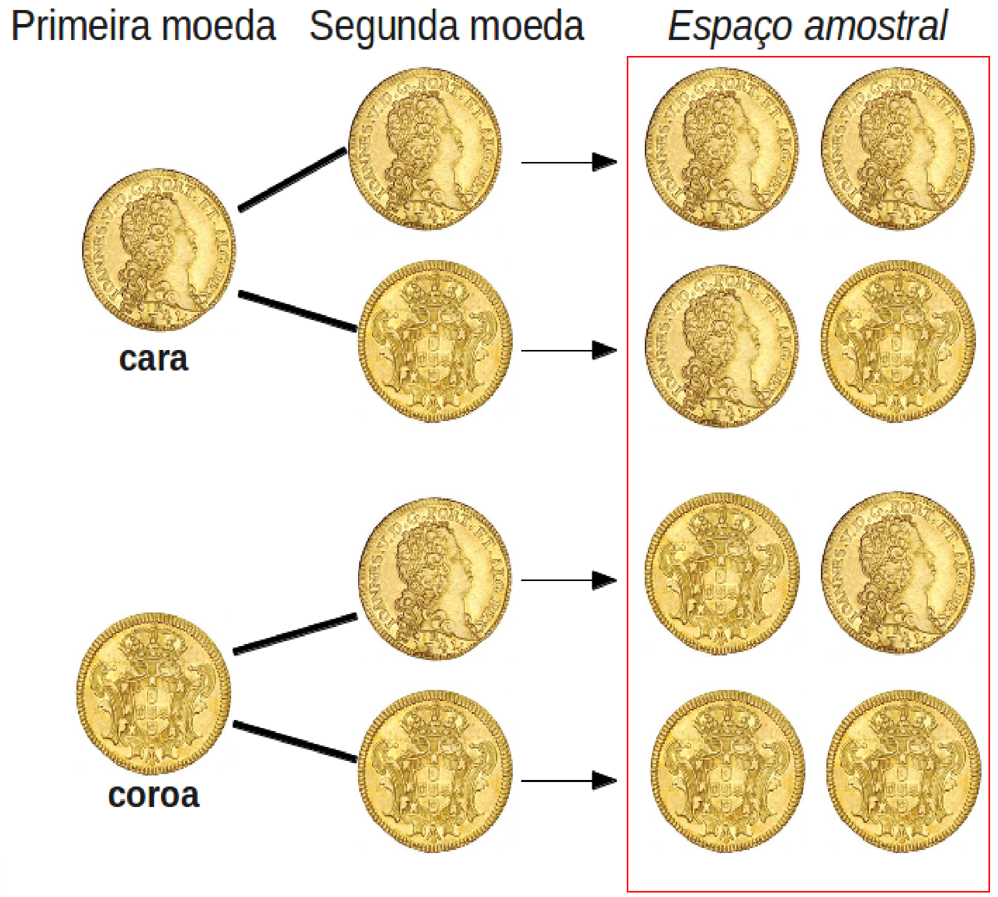
- Determinístico

- Probabilístico

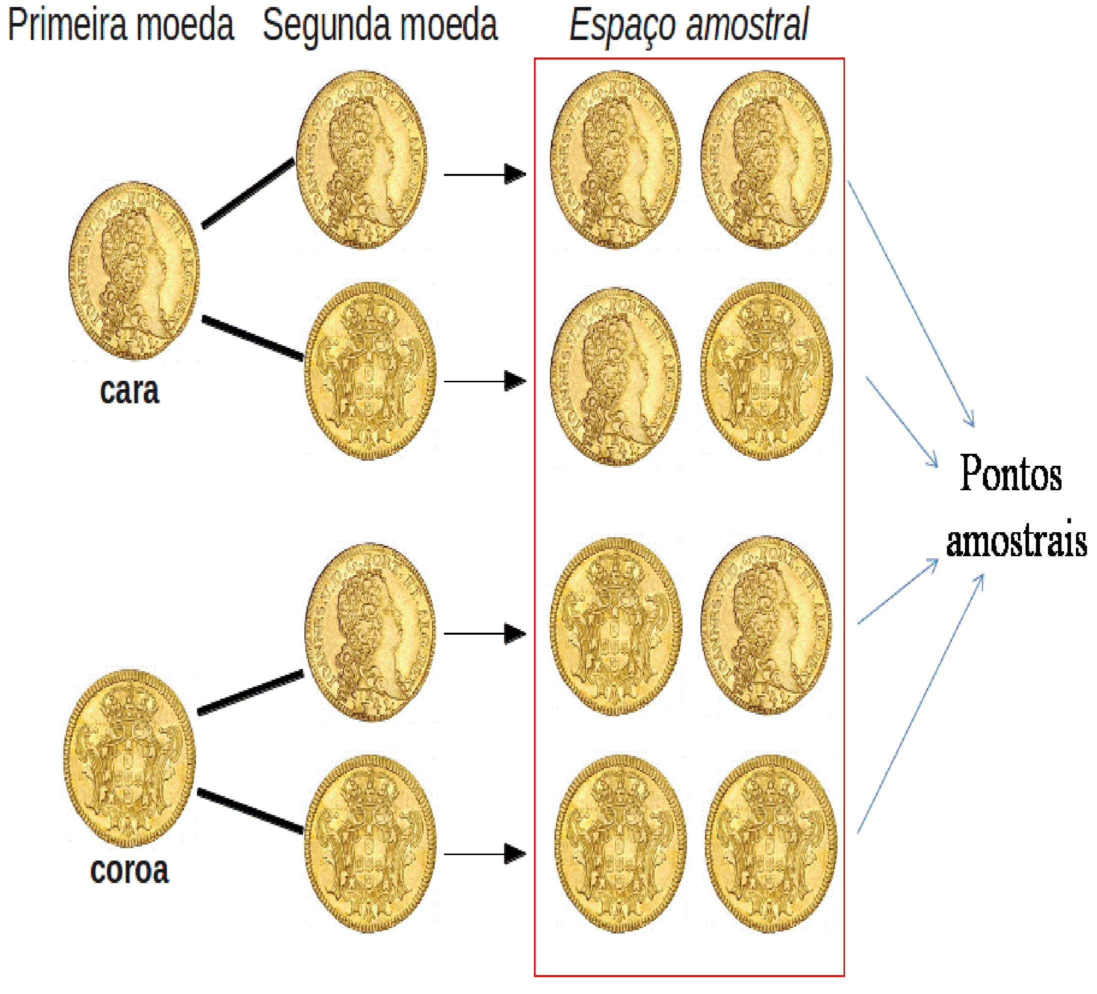
Caracterização de um estudo probabilístico

- **Experimento:** qualquer processo que gera resultados bem definidos.
- **Experimento aleatório:** é um tipo de experimento cujo resultado não pode ser previsto.
- **Experimentos aleatórios equiprováveis:** são experimentos em que qualquer resultado pode ocorrer com a mesma chance.

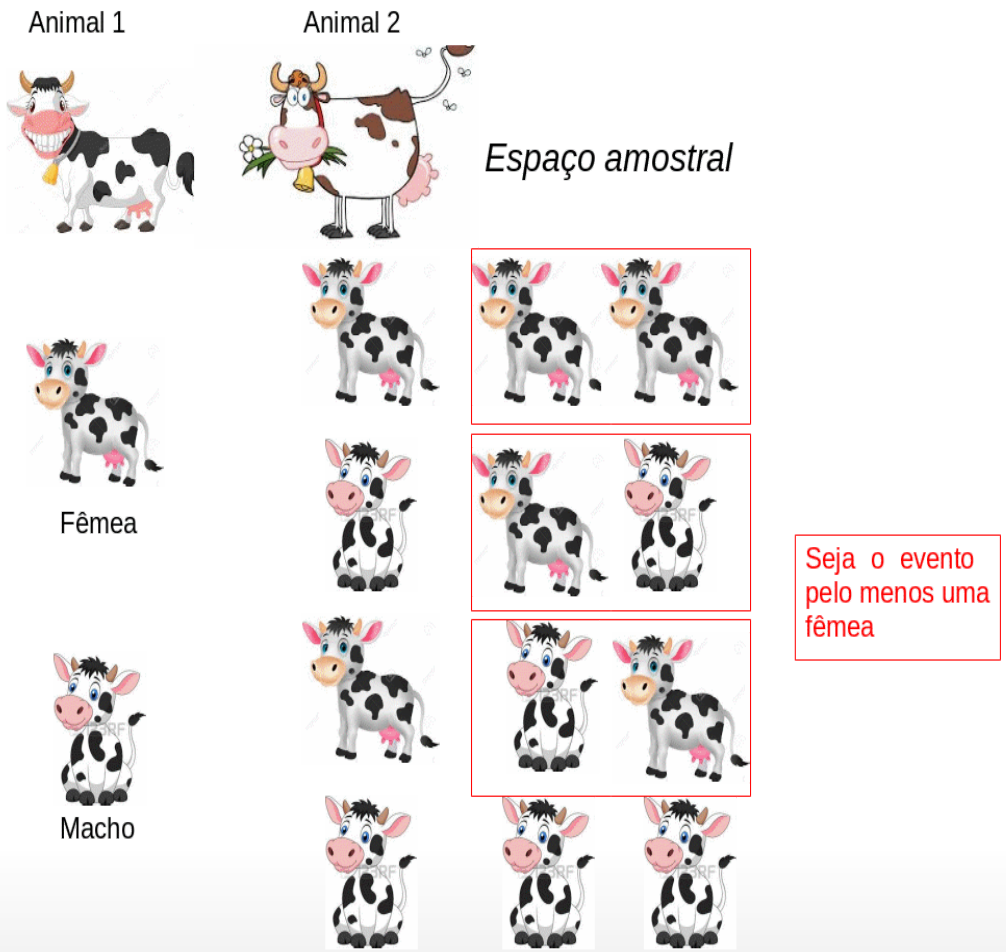
- **Espaço amostral:** é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório (equiprovável) que será indicado por Ω (ômega). Indicaremos o número de elementos de um espaço amostral por $n(\Omega)$.



- **Ponto amostral:** é cada resultado do espaço amostral, ou seja, o conjunto de pontos amostrais forma o espaço amostral.



- **Evento:** é um conjunto particular de resultados do espaço amostral do experimento, em termos de conjuntos, é um subconjunto de Ω



Relações básicas entre conjuntos

União

- $A \cup B$ é o evento que ocorre se A ocorre, ou B ocorre, ou ambos ocorrem:

Intersecção

- $A \cap B$ é o evento que ocorre se A e B ocorrem simultaneamente:

Evento complementar

- $\bar{A}$ é o evento que não ocorre em A:

Eventos mutuamentes exclusivos (disjuntos)

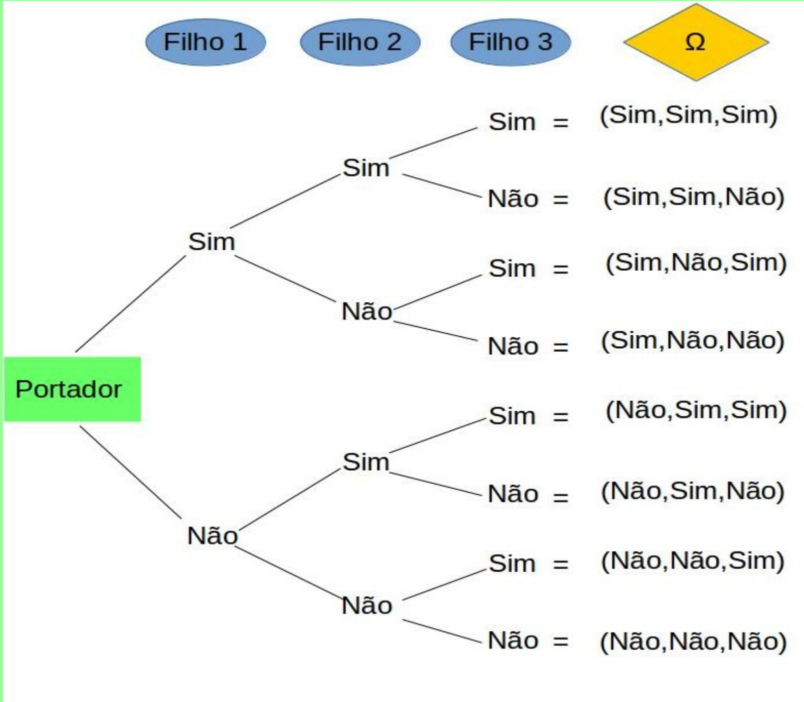
- Dois eventos (A e B por exemplo) são ditos mutuamente exclusivos quando a ocorrência de um deles implica a não ocorrência do outro, o que implica em $A \cap B = 0$.

- No lançamento de apenas uma moeda, o resultado ou é cara ou é coroa, não é possível ser cara e coroa ao mesmo tempo.

Aplicação

1. Seja um experimento que consiste na observação do nascimento de três crianças provenientes de uma mulher portadora de hemofilia clássica. Responda as questões abaixo.

   a. Descreva o espaço amostral (Ω).



b. Represente por A o evento em que exatamente dois filhos sejam afetados pela doença

$$A = \{(Sim, Sim, Não), (Sim, Não, Sim), (Não, Sim, Sim)\}$$

c. Represente por B o evento em que nenhum filho é afetado pela doença

$$B = \{(Não, Não, Não)\}$$

d. Representa por C o evento em que pelo menos um filho é afetado pela doença

$$C = \{(Sim, Sim, Sim), (Sim, Sim, Não), (Sim, Não, Sim), (Sim, Não, Não),$$

$$(Não, Sim, Sim), (Não, Sim, Não), (Não, Não, Sim)\}$$

ou $C = \Omega - \{(Não, Não, Não)\}$

e. Quais são os resultados de $A \cap B, A \cap C$ e $\bar{B}$

$$A \cap B = \emptyset$$
$$A \cap C = A$$
$$\bar{B} = C$$

REGRAS BÁSICAS DE CONTAGEM

Alguns conceitos básicos

- Uma amostra é dita *ordenada* se os seus elementos forem ordenados, ou seja, se duas amostras com os mesmos elementos, porém em ordem distintas, forem consideradas diferentes.
    - Nas placas de automóveis por exemplo, a ordem das letras é importante, ou seja, um atomóvel com placa HQW - 0007 distingue de outro automóvel com placa WQH - 0007.
- Uma amostra é dia *não ordenada* se os seus elementos forem *não ordenados*, ou seja, se duas amostras com os mesmos elementos, porém em ordem distintas, forem considerados iguais.
    - Na mega sena por exemplo, se você marca os números $2, 5, 12, 22, 34$ e 55 no volante, e os números sorteados são $55, 22, 2, 34, 12$ e 5, você é o ganhador do prêmio.

Arranjo simples (sem reposição)

- O número de amostras ordenadas *sem reposição* de tamanho *n* de um conjunto de N elementos é chamado de **arranjo**.
- Representamos o arranjo por $A_{N,n} = A_n^N$.
- Sua fórmula matemática é:

$$A_n^N = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Aplicação

2. Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

   Neste caso a ordem das letras formam palavras diferentes. Supondo que iremos amostrar sem reposição do alfabeto, então:

$$A_3^{26} = \frac{26!}{(26-3)!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23!}{23!} = 15600.$$

Arranjo simples (com reposição)

- É o número amostras ordenadas *com reposição* de tamanho n, de um conjunto com N elementos.
- O cálculo é efetuado como N^n.

Aplicação

2. Quantas placas de automóveis é possível formar com 3 letras do alfabeto? Seria possível hoje termos carros com apenas letras?

   A diferença da aplicação anterior, é que nesta aplicação a amostra é feita *com reposição*. Logo, tem-se:

$$AR_3^{26} = 26^3 = 17576.$$

   Só seria possível emplacar 17576 carros. Segundo o wikipédia, há no Brasil uma frota de 93867016 veículos.

Combinação simples

- É o número de amostras não ordenadas *sem reposição* de tamanho *n*, de um conjunto com *N* elementos.
- A fórmula é dado por:

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

2. Para seleção brasileira foram convocados dois goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?

   Para montar a seleção, percebemos que a ordem dos jogadores não importa, e é claro, a amostragem é feita sem reposição. Para cada posição (goleiro, atacante, etc.) podemos ter uma combinação de jogadores. Na posição de goleiro, podemos ter apenas duas combinações possível (joão ou pedro, pedro ou joão). Na demais posições segue o mesmo raciocínio.

Percebam que, para determinarmos de quantos modos (que chamaremos de Q esta variável) podemos escalar a seleção, nosso time terá goleiro **e** zagueiro **e** meio de campo **e** atacante. Então, o cálculo é feito da seguinte maneira:

$$Q = C_1^2 \cdot C_4^6 \cdot C_4^7 \cdot C_2^4$$

$$= 2 \cdot \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot \frac{7!}{4!(7-4)!} \cdot \frac{4!}{2!(4-2)!}$$

$$= 6300$$

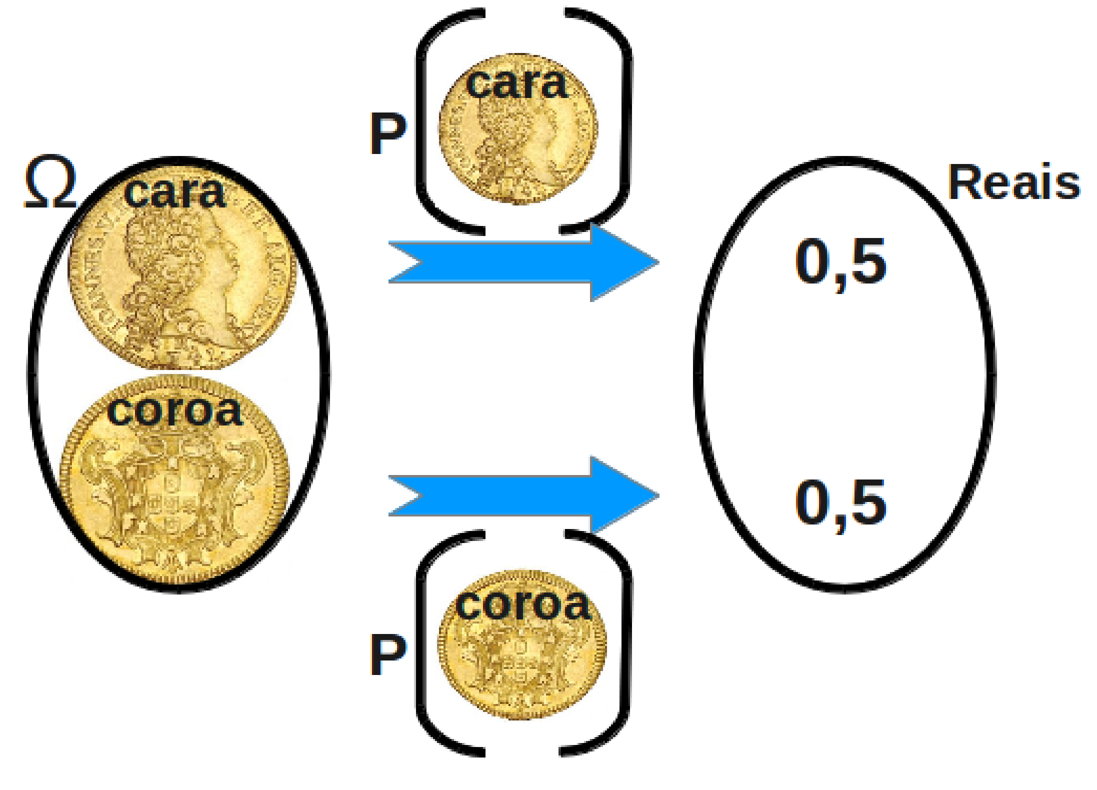
PROBABILIDADE

Conceito

- é um número que expressa a chance de ocorrência de um determinado evento.

Definição

- dado um experimento aleatório E,e Ω seu espaço amostral, a probabilidade de um evento A, indicada por P(A), é uma função definida em Ω que associa a cada evento um número real, satisfazendo os seguintes axiomas:



1. $P(\Omega) = 1$
2. Para qualquer evento A, $P(A) \geq 0$
3. Se $A_1, A_2, \cdots, A_k$ for um conjunto finito de eventos mutuamente exclusivos, então $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$

Axioma ou **postulado** é uma sentença ou proposição que não é provada ou demonstrada e é considerada como óbvia ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria. Por essa razão, é aceito como verdade e serve como ponto inicial para dedução e inferências de outras verdades (dependentes de teoria). Em outras palavras, é como se fossem as leis que regem a nossa sociedade.

Propriedades básicas da probabilidade

1. Para qualquer evento A, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
2. Se A e B forem dois eventos mutuamente exclusivos, então $P(A \cap B) = 0$
3. Para quaisquer dois eventos A e B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Cálculo de probabilidades

- Seja E um experimento aleatório, Ω o seu espaço amostral e A um evento pertencente ao espaço amostral. Se N é o número de resultados possíveis e N(A) o número de resultados do evento A, então a probabilidade do evento A ocorrer é

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

Aplicação

2. Aproveitando os dados da aplicação 1, calcule a probabilidade de $P(A \cap B), P(A \cap C), P(\bar{B})$.

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cap C) = P(A) = \frac{3}{8}$$

$$P(\bar{B}) = P(C) = \frac{7}{8}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

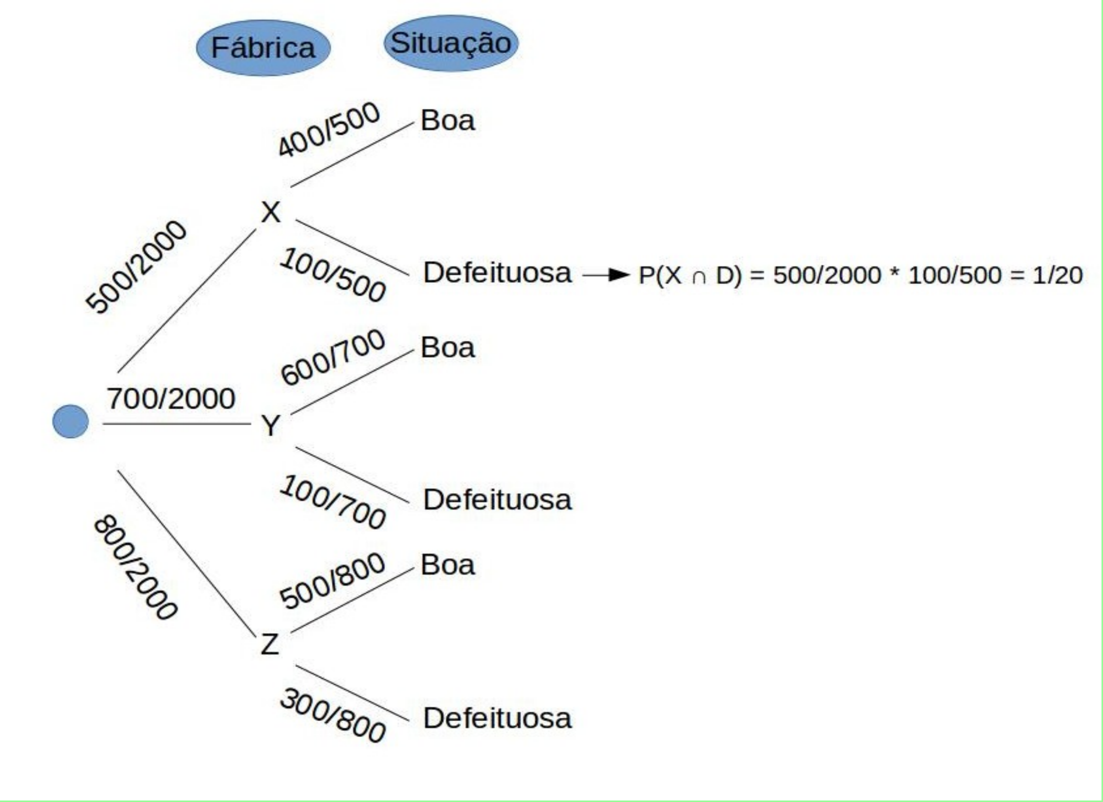
- É utilizada em situações no qual a informação de um determinado evento irá acrescentar a respeito de um outro evento.
- Usaremos a notação $P(A|B)$ para representar a probabilidade condicional de A dado que ocorreu o evento B.
- Logo, para quaisquer dois eventos A e B com P (B) > 0, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Aplicação

3. Num supermercado há 2000 lâmpadas, provenientes de 3 fábricas distintas, X, Y e Z. X produziu 500, das quais 400 são boas. Y produziu 700, das quais 600 são boas e Z as restantes, das quais 500 são boas. Se sortearmos ao acaso uma das lâmpadas nesse supermercado, qual a probabilidade de que sendo da fábrica X, ela seja defeituosa?

Seja B, o evento de uma lâmpada ser boa e D o evento da lâmpada ser defeituosa, tem-se o seguinte evento de interesse: (D|X) e consequentemente se quer calcular P(D|X). Usando o diagrama em árvore temos:



Logo, tem-se:

$$P(D|X) = \frac{P(D \cap X)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{5}{20}} = \frac{1}{5}$$

Regra da multiplicação

- Pela definição de probabilidade condicional, tem-se a seguinte regra

$$P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$$

- Esta regra é chamada de mutiplicação, e é muito útil em vários problemas como veremos a seguir.

Aplicação

4. Num lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Duas peças são retiradas uma após a outra sem reposição. Qual a probabilidade de ambas não serem defeituosas? Considere os eventos:

A = {primeira peça é boa}
B = {segunda peça é boa}

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \\ &= 0,42 \end{aligned}$$

Independência estatística

- Dois eventos **A** e **B** são ditos **independentes** quando a ocorrência de um evento não afeta a possibilidade de ocorrência de outro evento.

Definição

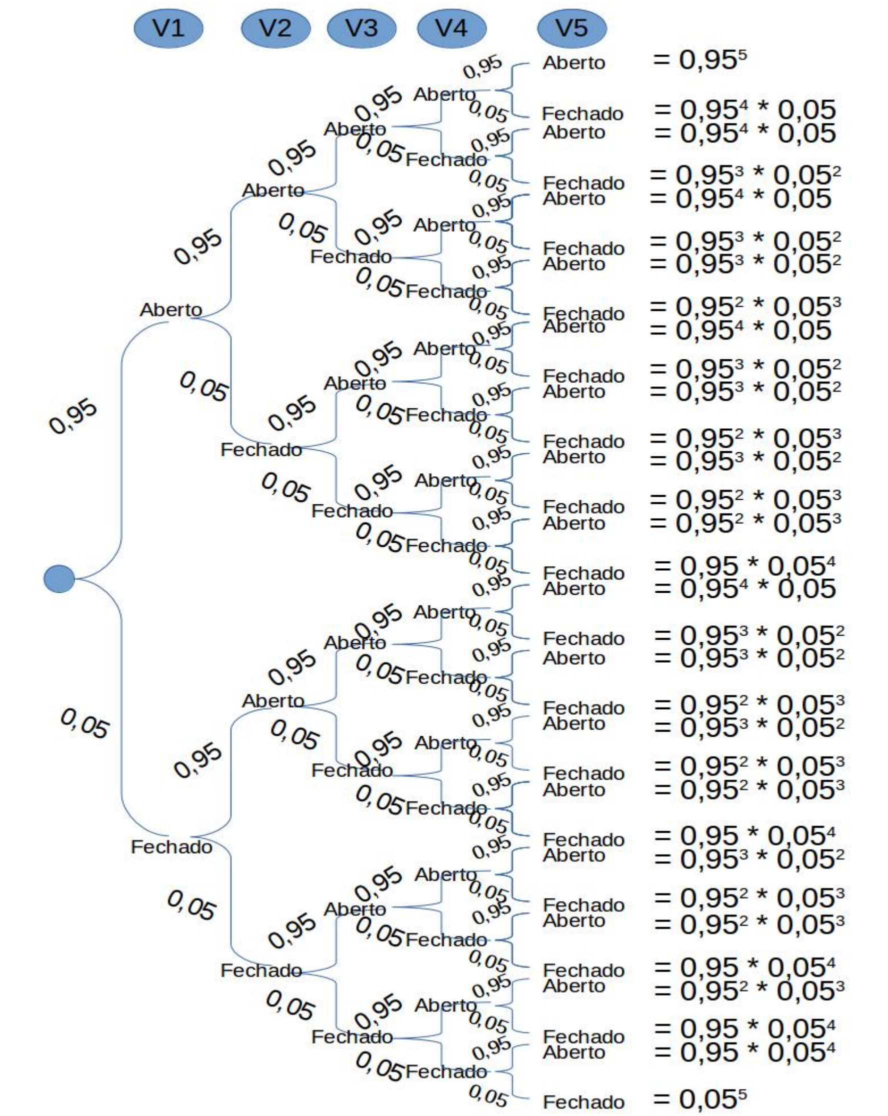
- Dois eventos A e B são independentes se $P(A|B) = P(A)$ e dependentes em caso contrário.
  - Proposição - A e B são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Aplicação

5. Uma caldeira tem cinco válvulas de alívio idênticas. A probabilidade de uma válvula específica ser aberta sob demanda é de 0,95. Assumindo operação independente das válvulas, calcule P(pelo menos uma válvula é aberta) e P(pelo menos uma válvula tem falha ao abrir.)

   Vamos fazer o diagrama em árvore.


V1
V2
V3
V4
V5
$= 0,95^5$
$= 0,95^4 * 0,05$
$= 0,95^4 * 0,05$
$= 0,95^3 * 0,05^2$
$= 0,95^4 * 0,05$
$= 0,95^3 * 0,05^2$
$= 0,95^3 * 0,05^2$
$= 0,95^2 * 0,05^3$
$= 0,95^4 * 0,05$
$= 0,95^3 * 0,05^2$
$= 0,95^3 * 0,05^2$
$= 0,95^2 * 0,05^3$
$= 0,95^3 * 0,05^2$
$= 0,95^2 * 0,05^3$
$= 0,95^2 * 0,05^3$
$= 0,95 * 0,05^4$
$= 0,95^4 * 0,05$
$= 0,95^3 * 0,05^2$
$= 0,95^3 * 0,05^2$
$= 0,95^2 * 0,05^3$
$= 0,95^3 * 0,05^2$
$= 0,95^2 * 0,05^3$
$= 0,95^2 * 0,05^3$
$= 0,95 * 0,05^4$
$= 0,95^3 * 0,05^2$
$= 0,95^2 * 0,05^3$
$= 0,95^2 * 0,05^3$
$= 0,95 * 0,05^4$
$= 0,95^2 * 0,05^3$
$= 0,95 * 0,05^4$
$= 0,95 * 0,05^4$
$= 0,05^5$

Considerando A o evento que representa a válvula aberta e $\bar{A}$ o evento que representa o evento da válvula fechada e colocando em termos matemáticos a primeira pergunta temos:

$$P(A \geq 1) = P(A = 1) + P(A = 2) + P(A = 3) + P(A = 4) + P(A = 5)$$
$$= 3 \cdot 10^{-}5 + 0,001128 + 0,02143 + 0,20363 + 0,7738$$
$$= 0,9999$$

Respondendo a segunda pergunta temos:

$$P(\bar{A} \geq 1) = P(\bar{A} = 1) + P(\bar{A} = 2) + P(\bar{A} = 3) + P(\bar{A} = 4) + P(\bar{A} = 5)$$
$$= 0,20363 + 0,02143 + 0,001128 + 3 \cdot 10^{-}5 + 0$$
$$= 0,2262$$