Distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias discretas

Universidade Estadual de Santa Cruz

Ivan Bezerra Allaman

Destaques

Aplicações das áreas de exatas

Aplicações das áreas biológicas

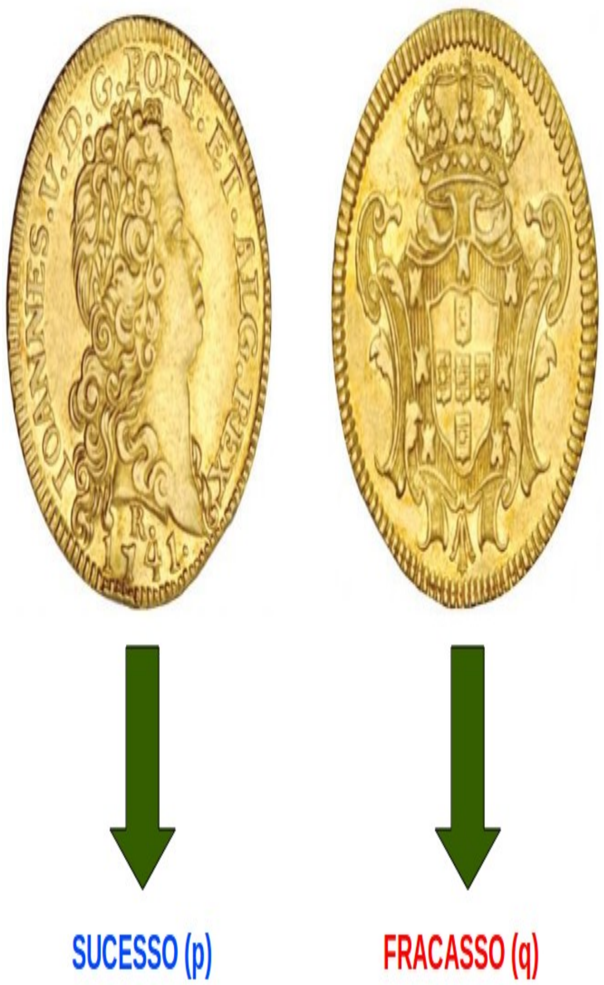
Cronograma

1. Distribuição Bernoulli
2. Distribuição Binomial
3. Distribuição Poisson

DISTRIBUIÇÃO BERNOULLI

Jakob Bernoulli. De 1965 a 1705

- É uma das distribuição mais simples de probabilidade;
- Experimentos que consistem em *apenas* uma única tentativa e consequentemente tendo **sucesso** ou **fracasso**, podem utilizar esta distribuição para o cálculo de probabilidades.



- Seja um experimento que consiste no lançamento uma única vez de uma moeda;
- Seja o evento de interesse o surgimento da face cara;
- Logo, denominamos o evento de interesse como *sucesso*, representado pela letra **p** e o outro como *fracasso*, representado por **1-p**.

Seja **Y** o número de *sucessos* em um única tentativa do experimento. Então **Y** assume o valor **0** que corresponde ao fracasso, com probabilidade $1 - p$, ou o valor **1**, que corresponde ao sucesso, com probabilidade p. Logo:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{fracasso com } P(Y = 0) = 1 - p \\ 1 & \text{sucesso com } P(Y = 1) = p \end{cases}$$

Portanto, a função de probabilidade é dada por:

$$P(Y = y) = p^y \cdot q^{1-y}$$

com parâmetros

$$E(Y) = p \;\; e \;\; VAR(Y) = pq$$

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

- Experimentos que consistem em **mais** de uma tentativa e cujo os valores possíveis são **sucesso** ou **fracasso**, podem utilizar esta distribuição para o cálculo de probabilidades;
- Percebam que uma variável com distribuição binomial consiste de **n** tentativas independentes de uma variável com distribuição Bernoulli.
- Denotamos Y com distribuição binomial como: $Y \sim B(n, p)$.

A função de probabilidade é dada por:

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y}$$

com parâmetros

$$E(Y) = np \;\; e \;\; VAR(Y) = npq$$

Aplicação

1. Um produto eletrônico contém 40 circuitos integrados. A probabilidade de que qualquer circuito integrado seja defeituoso é 0,01 e os circuitos integrados são independentes. O produto só funciona se não houver circuitos integrados defeituosos.Pergunta-se:

   a. Qual é a probabilidade do produto operar?

      Vamos identificar primeiramente a variável aleatória de interesse **Y**. Neste caso a variável de interesse *são os circuitos integrados que não apresentam defeitos*. Então **p** que a probabilidade de sucesso é de 0,99. O tamanho da amostra **n** é 40. Portanto efetuando os cálculos tem-se:

$$P(Y = 40) = \binom{40}{40} \cdot 0,99^{40} \cdot 0,01^{40-40}$$
$$= 1 \cdot 0,99^{40} \cdot 0,01^{0} = 0,66897$$

b. Qual é a probabilidade do produto não operar?

$$P(Y < 40) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + \cdots + P(Y = 39)$$
$$= 1 - P(Y = 40) = 0,3310.$$

c. Quantas circuitos integrados você espera que não apresente defeito?

O quanto eu espero é sinônimo de esperança. Logo,

$$E(Y) = 40 \cdot 0,99 = 39.6$$

d. Calcule a variância e o desvio padrão do número de circuitos que não apresentam defeitos.

$$VAR(Y) = npq = 40 \cdot 0,99 \cdot 0,01 = 0,396$$
$$\sigma_Y = \sqrt{0,396} = 0,6293$$

1. Para efetuar a regulação hormonal de uma linha metabólica, injeta-se em ratos albinos um fármaco que inibe a síntese de proteínas do organismo. Geralmente, quatro de cada vinte ratos morrem por causa do fármaco antes que o experimento tenha sido concluído. Se tratarmos dez animais com o fármaco, qual a probabilidade de que ao menos oito cheguem vivos ao finaldo experimento?

DISTRIBUIÇÃO POISSON

A função de probabilidade é dada por:

$$P(Y = y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}$$

com parâmetros

$$E(Y) = \lambda \ \ e \ \ VAR(Y) = \lambda$$

Aplicação

2. O número de superfícies com falhas em painéis de plástico usados no interior de automóveis tem uma distribuição Poisson com uma média de 0,05 falhas por metro quadrado de painel de plástico. Suponha que um automóvel contenha no seu interior 10 metros quadrados de painel de plástico.

   a. Qual é a probabilidade de não encontrar falha na superfície de um painel de plástico de automóveis?

      Precisamos primeiro avaliar a taxa média de falhas em 10 metros quadrados que compreende a área de um painel de automóvel. Neste caso, nosso

$$\lambda = 10 * 0,05 = 0.5$$

a. …

Logo, se X é o número de falhas na superfície de um painel de plástico, então a probabilidade pedida é:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-0,5} \cdot 0,5^0}{0!} = 0,6065$$

b. Se 10 carros são vendidos por uma concessionária, qual é a probabilidade que nenhum dos 10 carros tenha qualquer falha nos paineis?

Percebam agora que a variável aleatória de interesse mudou. Não é mais o número de falhas por metro quadrado em um painel de plástico, e sim, se um carro apresenta qualquer falha no painel. Logo, tal variável tem distribuição binomial com probabilidade **p** de apresentar qualquer falha no painel. Portanto, a probabilidade **p** calculamos como:

b. …

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,6065 = 0,3935$$

Ou seja, é a probabilidade de apresentar alguma falha (1, 2, 3, …). Portanto, seja Y a variável aleatória binomial de algum carro apresentar falha no painel, então a probabilidade de nenhum carro apresentar falha no painel é:

$$P(Y = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0,3935^0 \cdot 0,6065^{10-0} = 0,0067$$

c. Se 10 carros são vendidos por uma concessionária, qual é a probabilidade de no máximo um carro ter alguma falha na superfície

$$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = 0,0067 + 0,04369 = 0,05039$$

2. Em uma certa população, observou-se um número médio anual de 12 mortes por câncer de pulmão. Se o número de mortes causado pela enfermidade segue uma distribuição de Poisson, qual a probabilidade de que, durante o ano corrente:

   a. Haja, exatamente, dez mortes por câncer de pulmão:

   b. Morram 15 ou mais pessoas por causa da enfermidade?

   c. Morram dez ou menos pessoas por causa da enfermidade?